



## DAUGIADISPERSIO IR VIENDISPERSIO DALELIŲ MIŠINIO ELGSENOS TYRIMAS. II DALIS: STABILUMO BŪSENŲ CHARAKTERIZAVIMAS

Gvidas Pocius<sup>1</sup>, Robertas Balevičius<sup>2</sup>

*Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva*

*El. paštas: <sup>1</sup>gpocius@gmail.com; <sup>2</sup>robertas.balevicius@vgtu.lt (corresponding author)*

*Įteikta 2012 01 23; priimta 2012 04 22*

**Santrauka.** Šioje straipsnio dalyje pagrindinis dėmesys skiriamas viendispersinio ir daugiadispersio sferinių dalelių mišinio mikrobūsenai charakterizuoti, analizuojant atskirų mišinio dalelių stabilumą esant kvazistatiniam būviui. Tiriamos ir vizualizuojamos atskirų dalelių greičio vektorių normalinių plokštumų formuojamos tekstūros, kurios esant kvazistatiniam būviui interpretuojamos kaip tam tikri rezonansinio poveikio dariniai, gaubiantys dalelių paviršių.

**Reikšminiai žodžiai:** diskrečiųjų elementų metodas, daugiadispersis, viendispersis sferinių dalelių mišiniai, mikrobūseną, kvazistatinis pusiausvyros būvis, Hamiltono mechanika, fazinė erdvė.

### 1. Įvadas

Modeliuojant diskrečiųjų elementų metodu (DEM), daugeliu atvejų svarbu analizuoti ne tik dalelių dinamiką, bet ir kvazistatinį būvį, kurio metu dalelių greičiai, pagreičiai nykstamai sumažėja. Daugelis kontinuumo mechanikos sprendinių išvedami laikantis dalelių greičių invariantiškumo prielaidos laiko ir padėties atžvilgiu. Toks požiūris iš esmės supaprastina teorinius sprendinius, nes nebūtina ieškoti įtempių ir greičių sąsajos, lemiančios visos medžiagos įtempių būvį. Edwards, Oakeshott (1989) pasiūlyta kontroversiška teorija, paremta statistine termodinamika, pateikė visiškai naują požiūrį į granuliuotą medžiagą, pabrėžiant dalelių mikrobūsenų tyrimo svarbą.

Diskrečiųjų elementų metodas daugeliu atvejų labai gerai modeliuoja dalelių dinaminį procesą, nes pagrįstas judėjimo lygtimis. Pereinant nuo šio proceso prie kvazistatinio būvio medžiagos elgsenos, susiduriama su tam tikrais sunkumais. Norint gauti kvazistatinę būseną, dažnai nepakanka įvertinti tik dalelių trintį ir būtina naudoti kitus kinetinės energijos praradimo veiksnius, tokius kaip klampusis slopinimas. Toks modeliavimas lemia kvazistatinį būvį, tačiau išlieka tam

tikras dalelių mikrobūsenų kitimas, susijęs su pusiausvyros padėčių stabilumu, nes energija, kaip įprasta, nesumažėja iki visiško nulio.

Kvazistatinis pusiausvyros būvis, ypač taikant DEM, dalelių mikrolygmeniu literatūroje beveik nėra nagrinėtas. DEM taikymo galimybės, atsižvelgiant į medžiagos pusiausvyros sąlygas, nagrinėtos Xuxin, Andrade darbe (2008). Autoriai kvazistatinio būvio pasiekimą gaudavo algoritmiškai kalibruodami išreikštinę dinamikos lygčių sprendimo schemą. Pusiausvyros kriterijumi laikyti homogenizuoti įtempiai, gauti skaičiuojant vidutinę reikšmę tam tikrame dalelių tūryje veikiančių dalelių kontakto jėgų, ir tą tūrį veikiančių išorinių jėgų.

Pirmojoje straipsnio dalyje tirta vien- ir daugiadispersio dalelių mišinio elgsena, aptarta modelavimo metodika. Neperžengiant kvazistatinio būvio gautas daleles veikiančių kontaktinių jėgų pasiskirstymas, analizuota jėgų ir reakcijų pusiausvyra, dalelių koordinacijos skaičius bei struktūros tankumas. Šioje straipsnio dalyje unikaliu būdu analizuojant atskirų mišinio dalelių stabilumą, pateikiama pirmojoje dalyje aprašyto mikrobūsenos charakterizavimo metodo realizacija.

## 2. Tyrimo rezultatai

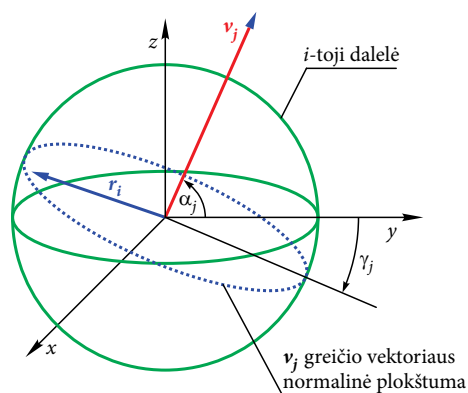
Šioje straipsnio dalyje nagrinėjamas atskirų dalelių stabilumas esant mišinio kvazistatinės pusiausvyros būviui. Kvazistatinė pusiausvyra – sąlyginė pusiausvyra, nes ji reiškia dalelių makroskopinės būsenos stabilizavimąsi, kai dalelė suvaržoma apie ją susiformavusios tam tikros mišinio struktūros, tačiau mikrolygiu tam tikras judėjimas vis dar yra įmanomas, lemiantis mikrobūsenų kitimą.

Siekiant ištirti dalelės mikrobūsenas, sukurtas kompiuterinis algoritmas, kuriame pasirenkama viena konkreti mišinio dalelė ir, naudojantis diskrečiųjų elementų metodu gautais rezultatais, erdvėje atidedamos visos jos greičio vektorių normalinės plokštumos. Šios apvalios plokštumos, kurių spindulys lygus dalelės spinduliui  $r_i$ , yra statmenos greičio vektoriams (1 pav.). Gaunama šių plokštumų gaubtinė, vaizduojanti dalelės trajektorijos kitimą mišinyje viso modeliavimo metu.

2 pav. parodyta dalelės greičio vektorių normalinių plokštumų suformuota gaubtinė. Krisdama  $i$ -toji dalelė (kol jos trajektorija nedaug trikdoma) turi greitį, nukreiptą žemyn, taigi greičio vektorių normalinės plokštumos suformuoja cilindrą (2 pav., b). Šis cilindras gali būti laikomas greičio vektorių normalinių plokštumų gaubtine. Cilindro spindulys apytiksliai lygus dalelės spinduliui.

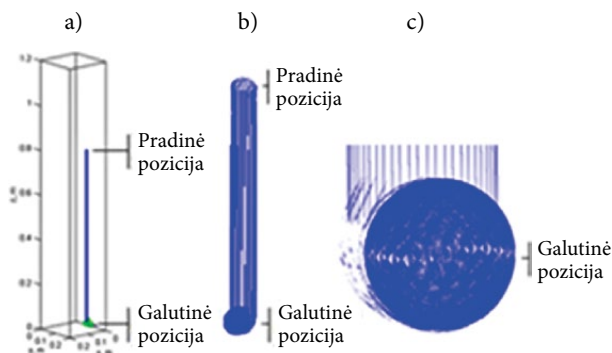
Kadangi dalelių stabilumas tiriamas mišinio kvazistatinio pusiausvyros būvio sąlygomis, tad vertinamas tik 2 pav., c, parodytas evoliucijos etapas. 4 pav. parodyta detali 2 pav., c, susidarymo eiga, kartu su normalinėmis plokštumomis vaizduojant ir greičio vektorius. 3 pav. vaizduojama galutinėje pozicijoje (2 pav., a) esanti atsitiktinai pasirinkta daugiadispersio mišinio dalelė, kartu su artimiausiomis jos judėjimą varžančiomis dalelėmis. Ši dalelė turi tik mikrolygio poslinkius, todėl varžančioje aplinkoje prasideda chaotiškas dalelės greičio krypties kitimas, suformuojant visą vektorių lauką su atitinkamomis jų normalinėmis plokštumomis. Šiuo atveju greičio vektorių normalinių plokštumų gaubtinė pavirsta į sferinį  $r_i$  spindulio paviršių su tam tikra tekstūra (4 pav., c).

Analogiškus greičio vektorių ir jų normalinių plokštumų laukus sudarius kiekvienai daugiadispersio mišinio dalelei, vektorių laukuose akivaizdžių dėsninųjų išvėlgti nepavyko, o normalinių plokštumų sankirtos dalelių paviršiuje sudaryta tekstūra dugne esančiose dalelėse parodė invariantiškumą, neatsižvelgiant į trintį mišinyje (3 pav.).



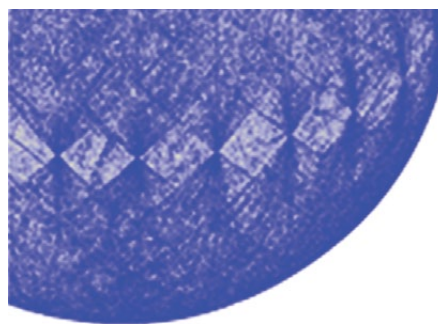
1 pav.  $i$ -tosios dalelės  $v_j$  greičio vektoriaus normalinės plokštumos orientacija ( $r_i$  –  $i$ -tosios dalelės spindulio vektorius)

Fig. 1. Orientation of the normal plane of the  $i^{\text{th}}$  particle's velocity vector  $v_j$  (here  $r_i$  is the radius vector of the  $i^{\text{th}}$  particle)



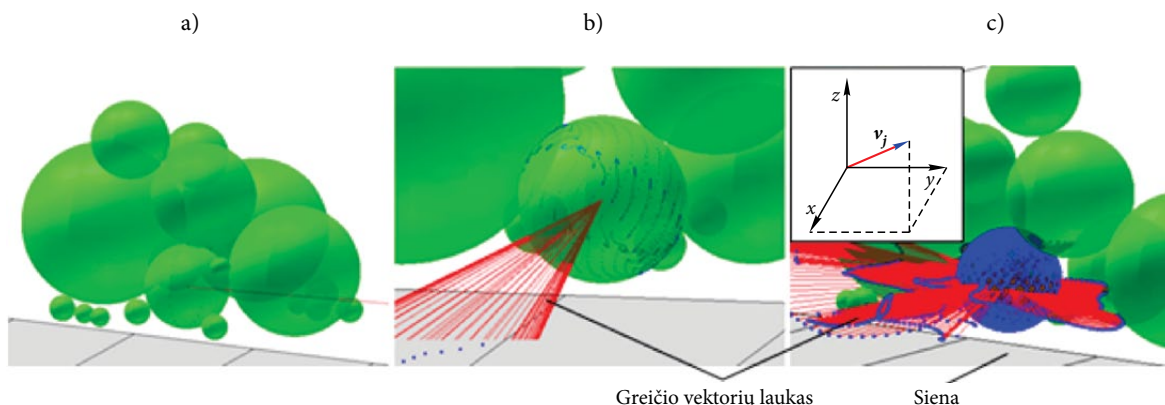
2 pav.  $i$ -tosios dalelės greičio vektorių normalinių plokštumų gaubtinė: a – gaubtinės padėtis skaičiuojamojoje erdvėje; b – pilnoji gaubtinė; c – gaubtinė mišinio kvazistatinės pusiausvyros būvio sąlygomis

Fig. 2. Envelope of normal planes of the  $i^{\text{th}}$  particle's velocity vectors: a – position of the envelope in the computational space; b – full envelope; c – envelope in quasistatic equilibrium state of the mixture



3 pav.  $i$ -tosios daugiadispersio mišinio dalelės greičio vektorių normalinių plokštumų sankirtos dalelės paviršiuje sudaroma tekstūra

Fig. 3. Texture formed on the surface of the particle of the intersection between normal planes of the  $i^{\text{th}}$  polydispersed mixture particle's velocity vectors



**4 pav.**  $i$ -tosios dalelės greičio vektorių lauko plėtotė varžančioje aplinkoje: a – pirmasis greičio vektorius (raudonas) ir jo normalinė plokštuma (mėlynas taškinio perimetro apskritimas); b – dalinė vektorių lauko vizualizacija; c – pilnas vektorių laukas ir normalinių plokštumų sankirtos dalelės paviršiuje sudaroma tekstūra

**Fig. 4.** Development of the field of the  $i^{\text{th}}$  particle's velocity vectors in the constrained environment: a – the first velocity vector (red) and its normal plane (the blue circle with dotted circumference); b – partial visualisation of vector fields; c – the full vector field and texture formed on the surface of the particle of the intersection between normal planes

3 pav. pavaizduota tekstūra nėra vienintelė pastebėta dalelių mišiniuose. Viendispersiame mišinyje dominuoja tekstūra, turinti koncentrinį apskritimų pavidalą (5 pav.).

Koncentrinį apskritimų tekstūros atvejai dominuoja ir daugiadispersių mišinių dalelėse, esančiose aukščiau skaičiuojamosios erdvės dugno. Tai leidžia daryti išvadą, kad susiformavusių tekstūrų pavidalas yra tiesiogiai susijęs su mechaniniu dalelių laisvės laipsniu.

Siekiant detaliau išanalizuoti tekstūros dalelių paviršiuje formavimosi eigą, pagal pirmojoje straipsnio dalyje aprašytą metodiką sudaroma polinė diagrama (6 pav.), vaizduojanti dalelės greičio vektorių normalinių plokštumų posūkio kampo  $\gamma_j$  (1 pav.) ir dydžio  $|I_{j,2}|$ , priklausančio nuo kampo  $\alpha_j$  (1 pav.) ir apskaičiuojamo pagal (1) formulę, kitimą laiko atžvilgiu.

$$|I_{j,2}| = |\mathbf{n}| \cdot \alpha_j, \quad (1)$$

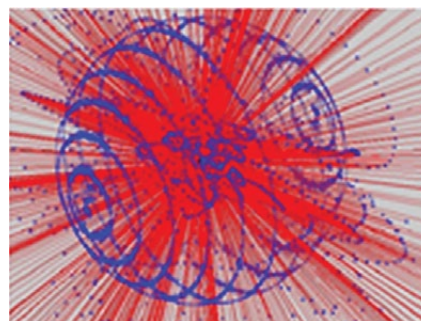
čia  $|\mathbf{n}| = 1$  – vienetinio normalinio vektoriaus modulis.

Kompiuteriniu algoritmu gautų kampų  $\alpha_j$  ir  $\gamma_j$  kitimo ribos parodytos 7 pav.

8–10 pav. pateikiama greičio vektorių normalinių plokštumų tinklo susidarymo eiga dugne esančios daugiadispersio mišinio  $i$ -tosios dalelės paviršiuje, kartu su greičio vektoriaus krypties kitimą vaizduojančiais poliniais grafikai (6 pav.).

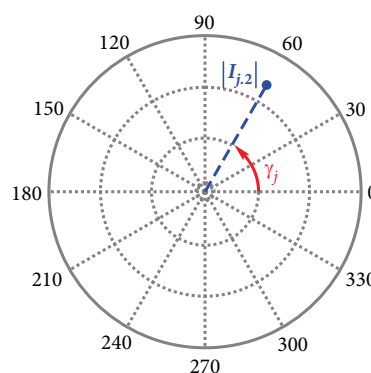
Dalelėms, pasižyminčioms koncentrinį apskritimų tekstūra, sudaryta minėtoji diagrama (6 pav.) rodo skirtingą charakterį, lyginant su 8–10 pav., tačiau vis vien išvelgiamas tam tikras diagramos centrinės dalies panašumas (11 pav.).

Kaip minėta, paviršiaus tekstūros pavidalas susijęs su dalelės mechaniniu laisvės laipsniu mišinyje, todėl viendispersiame mišinyje aptiktos tekstūros yra artimos pastebėtoms daugiadispersiuose mišiniuose.



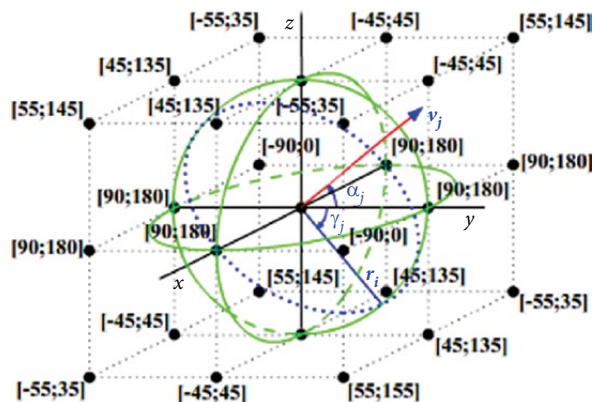
**5 pav.**  $i$ -tosios viendispersio mišinio dalelės greičio vektorių ir jų normalinių plokštumų sankirtos dalelės paviršiuje sudaroma tekstūra

**Fig. 5.** Texture on the surface of the intersection between normal planes and their velocity vectors of the  $i^{\text{th}}$  monodispersed mixture particle



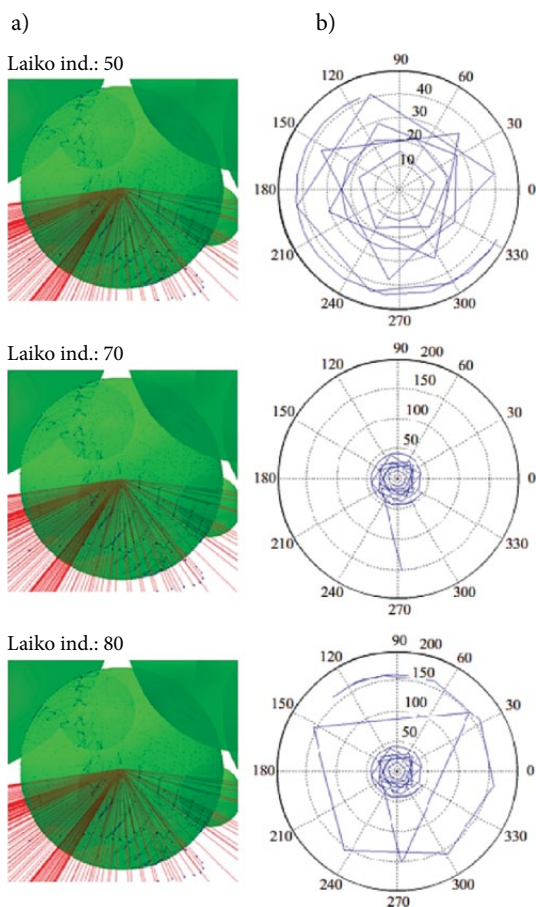
**6 pav.** Kintamieji  $|I_{j,2}|$  ir  $\gamma_j$  polinėje koordinatinių sistemoje  
**Fig. 6.** Variables  $|I_{j,2}|$  and  $\gamma_j$  in the polar coordinate system





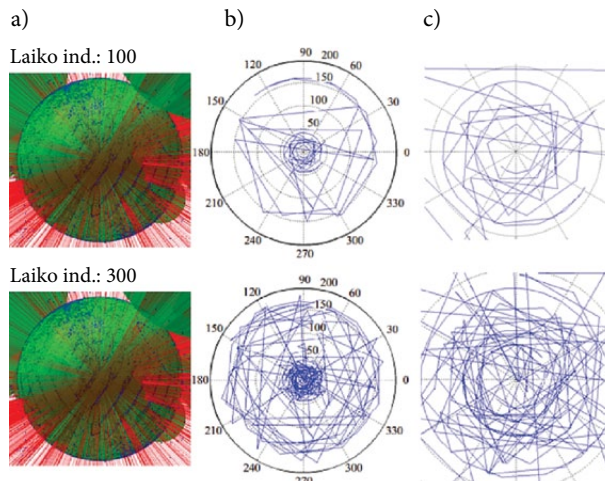
7 pav. Kampai  $\alpha_j$  ir  $\gamma_j$ , greičio vektoriui  $v_j$  esant konkrečiame taške. Laužtiniuose skliaustuose pažymėti kampai yra  $[\gamma_j, \alpha_j]$

Fig. 7. Angles  $\alpha_j$  and  $\gamma_j$ , when velocity vector  $v_j$  is on a particular point. Numbers in brackets are  $[\gamma_j, \alpha_j]$



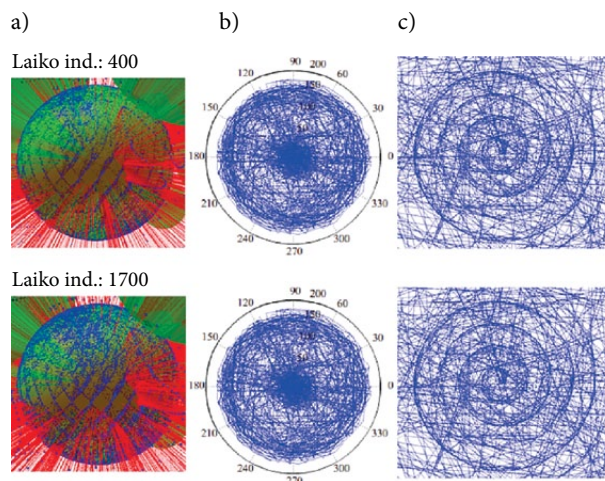
8 pav.  $i$ -tosios dalelės greičio vektorių ir jų normalinių plokštumų laukų formavimosi eiga daugiadispersiame mišinyje: a – greičio vektorių normalinių plokštumų sankirtos dalelės paviršiuje suformuota tekstūra konkrečiu laiko momentu; b – greičio vektoriaus krypties kitimas polinėje koordinatinių sistemoje. Laiko indeksai: 50, 70, 80

Fig. 8. Formation of fields pertaining to the  $i^{\text{th}}$  particle's velocity vectors and their normal planes in the polydispersed mixture: a – texture formed at particular time on the surface of the particle of the intersection between normal planes of velocity vectors; b – change of the velocity vector's direction in the polar coordinate system. Time indexes: 50, 70, 80



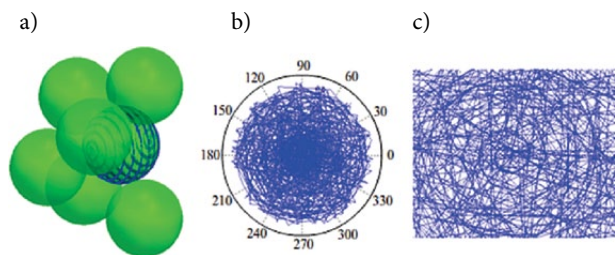
9 pav.  $i$ -tosios dalelės greičio vektorių ir jų normalinių plokštumų laukų formavimosi eiga daugiadispersiame mišinyje: a – greičio vektorių normalinių plokštumų sankirtos dalelės paviršiuje suformuota tekstūra konkrečiu laiko momentu; b – greičio vektoriaus krypties kitimas polinėje koordinatinių sistemoje; c – centrinė diagramos dalis. Laiko indeksai: 100, 300

Fig. 9. Formation of fields of the  $i^{\text{th}}$  particle's velocity vectors and their normal planes in the polydispersed mixture: a – texture formed at particular time on the surface of the particle of the intersection between normal planes of velocity vectors; b – change of the velocity vector direction in the polar coordinate system; c – the central part of the chart. Time indexes: 100, 300



10 pav.  $i$ -tosios dalelės greičio vektorių ir jų normalinių plokštumų laukų formavimosi eiga daugiadispersiame mišinyje: a – greičio vektorių normalinių plokštumų sankirtos dalelės paviršiuje suformuota tekstūra konkrečiu laiko momentu; b – greičio vektoriaus krypties kitimas polinėje koordinatinių sistemoje; c – centrinė diagramos dalis. Laiko indeksai: 400, 1700

Fig. 10. Formation of fields pertaining to the  $i^{\text{th}}$  particle's velocity vectors and their normal planes in the polydispersed mixture: a – texture formed at particular time on the surface of the particle of the intersection between normal planes of velocity vectors; b – change of the velocity vector's direction in the polar coordinate system; c – the central part of the chart. Time indexes: 400, 1700



**11 pav.** Normalinių plokštumų laukas viendispersio mišinio  $i$ -tojoje dalelėje, pasižyminčioje koncentrinų apskritimų tekstūra: a – greičio vektorių normalinių plokštumų sankirtos dalelės paviršiuje suformuota tekstūra galutiniu laiko momentu; b – greičio vektoriaus krypties kitimas polinėje koordinatų sistemoje; c – centrinė diagramos dalis

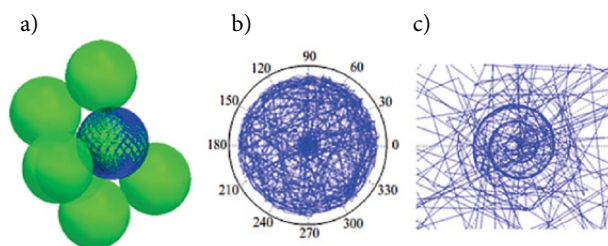
**Fig. 11.** Field of normal planes in the  $i^{\text{th}}$  particle of the monodispersed mixture with characteristic texture of concentric circles: a – the texture formed at the final moment of time on the surface of the particle of the intersection between normal planes of velocity vectors; b – change of the velocity vector direction in the polar coordinate system; c – the central part of the chart

8–10 pav. parodo, kad daugiadispersio mišinio dalelėse vyksta kvaziperiodinis polinės koordinatų sistemos (6 pav.) dydžių  $[I_{j,2}]$  ir  $\gamma_j$  brėžiamos trajektorijos „šokinėjimas“ tarp diagramos centrinės ir išorinės dalies, taip suformuojant aiškų spiralinį kontūrą centrinėje dalyje. Viendispersiame mišinyje panašus vaizdas pastebimas 12 pav., o 11 pav. matomas tik plonos vienasluoksnės „spiralės“ susiformavimas.

### 3. Tyrimo rezultatų interpretacija

Tiriant 8–10 pav. grafikus minėta, kad dalelių greičio vektorių krypties kitimą daugiadispersiuose mišiniuose vaizduojančiose polinėse diagramose pastebimas charakteringas grafiko kreivės kvaziperiodinis „šokinėjimas“ tarp centrinės ir išorinės diagramos dalies. Schmidt, Tondl (2009) teigia, kad kvaziperiodinis judesys, tiksliau, disipatyvioje (nagrinėjama atveju disipaciją sukelia slydimo ir riedėjimo trintys bei klampaus kontakto modelis) netiesinėje sistemoje (dalelių mišinys laikomas netiesine sistema) gali būti sužadinti neslopunami svyravimai (Leine, Campen 2011) šiais atvejais:

- Netiesinėse sistemose su savuoju svyravimų dažniu, veikiamose išorinės periodinės jėgos ir šie dažniai konkuruoja tarpusavyje.
- Netiesinėse sistemose, kurios spontaniškai pradeda svyruoti dviem dažniais, kintant vienam iš sistemos parametrų. Šiuo atveju vyksta konkavimas tarp skirtingų pačios sistemos svyravimo dažnių formų.



**12 pav.** Normalinių plokštumų laukas viendispersio mišinio  $i$ -tojoje dalelėje, esančioje skaičiuojamosios erdvės dugne: a – greičio vektorių normalinių plokštumų sankirtos dalelės paviršiuje suformuota tekstūra galutiniu laiko momentu; b – greičio vektoriaus krypties kitimas polinėje koordinatų sistemoje; c – centrinė diagramos dalis

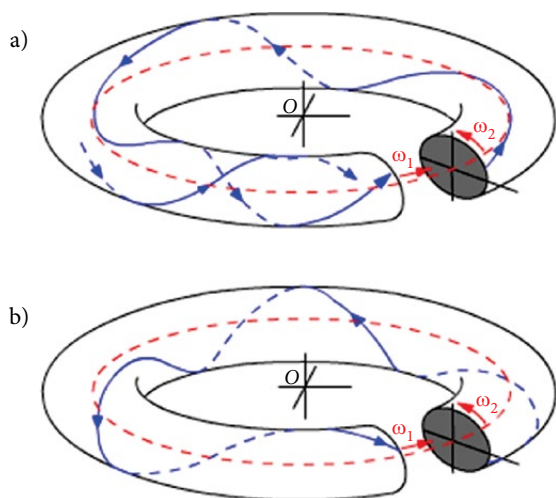
**Fig. 12.** Field of normal planes in the  $i^{\text{th}}$  particle of monodispersed mixture, with characteristic diamond texture: a – the texture formed at the final moment of time on the surface of the particle of the intersection between normal planes of velocity vectors; b – change of the velocity vector direction in the polar coordinate system; c – the central part of the chart

Dalelių mišiniuose netiesiškumą „šaltiniai“ galėtų būti: netiesinės-tamprios kontakto spyruoklės ir netiesinės kraštinės sąlygos.

Grįžtant prie pirmoje straipsnio dalyje aprašyto atskiros dalelės elgsenos nagrinėjimo kaip dinaminės sistemos, artimos Hamiltono sistemai, 8–10 pav. parodytos dalelės elgsenos plėtotę galima iliustruoti dvimačiu energijos toru fazinėje erdvėje (13 pav.). 13 pav. reikėtų interpretuoti kaip konkrečios nagrinėjamos dalelės fazinės trajektorijos judėjimą energijos toro paviršiumi, charakterizuojamu dviem kampiniais dažniais  $\omega_1$  ir  $\omega_2$  (šie dažniai susiję su dalelės laisvės laipsniais), atitinkamai didesniu ir mažesniu apskritimu. Kadangi laikoma, kad nagrinėjamų dalelių mišinių elgsena yra tik artima Hamiltono sistemai, todėl, remiantis Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) teorema (Broer 1954), energijos lygiai nebėra izoliuoti vienas nuo kito ir energijos toro skerspjūvių reikėtų išvaizduoti esant spiralinės formos. Santykis tarp kampinių dažnių gali būti racionalus ir iracionalus. Jei dažniai turi racionalų santykį, fazinės trajektorijos judesys yra periodinis ir ji grįš į savo pradinę tašką (rezonansinė elgsena (Lacey 2003)) (13 pav., b), jei iracionalus – toro paviršius tankiai užpildomas trajektorijomis (KAM trajektorijos) (13 pav., a). KAM teorema teigia, kad trajektorijos su racionaliaisiais santykiais yra nestabiliausios veikiant trikdžiams.

Gali egzistuoti ryšys tarp fazinės trajektorijos plėtotės energijos paviršiuje ir naudojant DEM analizuotų mišinių dalelių paviršiuose greičio vektorių normalinių plokštumų sankirtos suformuotos tekstūros.





**13 pav.** Fazinės trajektorijos dvimačio energijos toro paviršiuje: a – iracionalus kampinių dažnių santykis; b – racionalus kampinių dažnių santykis (rezonansinis toras)

**Fig. 13.** Phase trajectories on the surface of two-dimensional energy torus: a – irrational ratio of angular frequencies; b – rational ratio of angular frequencies (resonant torus)

Ši tekstūra gali būti interpretuojama kaip fazinė dalelės trajektorija energijos paviršiuje, o plonas kvazikristalinę struktūrą sudarančių juostų tinklas (14 pav.) yra energijos paviršių kertančios rezonansinės plokštumos (Lacey 2003), atskiriančios dviejų skirtingų judėjimo režimų trajektorijas.

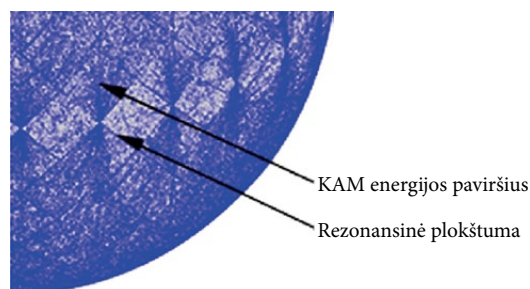
Buvo minėta, kad sužadintam neslopinamų svyravimų pasireiškimas netiesinėje fizinėje sistemoje (McMillan 1997) yra glaudžiai susijęs su sistemos pusiausvyros padėčių stabilumu. Taigi, siekiant charakterizuoti dinaminės sistemos mikrobūseną konkrečiu laiko momentu, būtina nustatyti jos fazinės erdvės globaliosios bifurkacijos (Lichtenberg, Lieberman 1992), išreiškiančios kokybinius evoliucionuojančios dinaminės sistemos elgsenos pokyčius, pavidalą. Šiam tikslui pasinaudosime anksčiau pateiktu teiginiu, kad dalelės greičio vektoriaus krypties kitimą vaizduojanti polinė diagrama (6 pav.) išreiškia dalelės kaip dinaminės sistemos fazinių trajektorijų, esančių energijos toro paviršiuje, sankirtos taškų su diagramos plokštuma, gaubtinę. Visa tai pagrindžiama aprašytu ryšiu tarp dalelės fazinės erdvės ir paviršiaus tekstūros. Galima manyti, kad ši gaubtinė išreikš fazinės trajektorijos globaliosios bifurkacijos charakterį.

Naudojantis ankstesniame skyriuje pateiktomis dalelės greičio vektoriaus krypties kitimo eigą vaizduojančiomis diagramomis ir išanalizavus jų dėsningumus, trimatis dalelės fazinės trajektorijos globaliosios bifurkacijos pavidalas gali būti atvaizduotas taikant Lichtenberg ir Lieberman (1992) pateiktą modelį (15 pav.).

15 pav. parodyta globaliosios bifurkacijos trimatė reprezentacija (Lichtenberg, Lieberman 1992) charakterizuojama homoklinine orbita į fiksuotą tašką, sudaryta iš stabilios daugdaros  $D^s$  (angl. *manifold*) ir nestabilios daugdaros  $D^{ns}$ . Viena iš dviejų  $D^s$  atšakų fazinėje erdvėje visada konverguoja spiralinio kontūro link, o atšaka  $D^{ns}$  yra trumpa ir atlieka fazinės trajektorijos atkūrimo funkciją. Daugdarai  $D^s$  artėjant prie „spiralinės“ centro, pasireiškia sąveika su  $D^{ns}$  (De Feo 2004), kurios metu fazinėje erdvėje sukuriama begalinis skaičius judėjimo trajektorijų su visais galimais periodais.

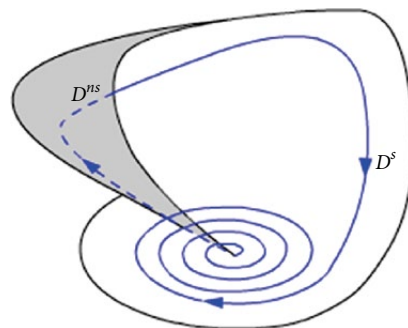
Literatūroje (De Feo 2004) randama, kad minėtosios fazinės trajektorijos globaliosios bifurkacijos elgsena yra artima Shilnikovo globaliajai bifurkacijai.

Išanalizavus atskiros dalelės fazinės trajektorijos elgsenos dėsningumus ir nustatčius jos globaliosios



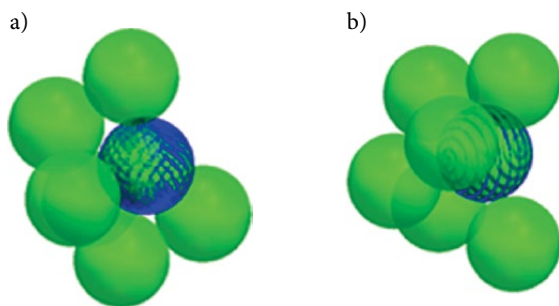
**14 pav.** Greičio vektorių normalinių plokštumų sankirtos dalelės paviršiuje suformuotos tekstūros interpretacija (fragmentas)

**Fig. 14.** Interpretation of the texture formed on the surface of the particle of the intersection between normal planes of velocity vectors (fragment)



**15 pav.** Kvazistatinio pusiausvyros būvio dalelių dinaminės elgsenos homoklininės globaliosios bifurkacijos trimatė interpretacija: čia  $D^s$  vaizduoja stabilią fazinės erdvės daugdarą, o  $D^{ns}$  – nestabilią daugdarą (mėlyna linija rodo tipinės fazinės trajektorijos pobūdį)

**Fig. 15.** Three-dimensional interpretation of homoclinic global bifurcation of dynamical behavior pertaining to particles in a quasistatic equilibrium state: here  $D^s$  shows a stable phase space manifold and  $D^{ns}$  shows unstable manifold (blue line shows the typical character of the phase trajectory)



**16 pav.** Greičio vektorių normalinių plokštumų sankirtos dalelių paviršiuje suformuotos tekstūros interpretacija: a – stiprus rezonansinis poveikis; b – stabilizavimasis be rezonansinio poveikio pasireiškimo

**Fig. 16.** Interpretation of the texture formed on the surface of particles of the intersection between normal planes of velocity vectors: a – a strong resonant effect; b – stabilization without the resonant effect

bifurkacijos pavidalą, galima charakterizuoti mišinių atskirų dalelių būseną pagal jų greičio vektorių normalinių plokštumų sankirtos paviršiuje suformuotą tekstūrą. Dalelės, kurių paviršiaus tekstūra yra panaši į parodytą 16 pav., a, dinaminėje evoliucijoje patyrė rezonansinį poveikį (Lacey 2003), charakterizuojamą skirtingų judėjimo režimų pasireiškimu ir suformuota susikertančių juostų tekstūra dalelės paviršiuje. Koncentrinių apskritimų ar panašaus pavidalo paviršiaus tekstūra (16 pav., b) rodo, kad dinaminėje evoliucijoje dalelės buvo suvaržytos ir, nesant hiperbolinių ypatingųjų taškų (Broer 2004), rezonansinis poveikis nepasireiškė, tai leido įvykti greitam dalelės būsenos stabilizavimuisi.

#### 4. Išvados

Šioje antrojoje straipsnio dalyje nagrinėtas kvazistatinio pusiausvyros būvio mišinio dalelių mikrobūsenai tirti pasiūlytas metodas. Tyrimo tikslams sukurtas kompiuterinis algoritmas, kuriuo remiantis ir naudojantis pirmoje dalyje aprašytu DEM modeliavimu gautais rezultatais daugiadispersiams ir viendispersiams dalelių mišiniam atvaizduotos atskirų dalelių greičio vektorių normalinių plokštumų sankirtos dalelių paviršiuje suformuotos tekstūros ir greičio vektorių krypties kitimą kvazistatinio pusiausvyros būvio sąlygomis charakterizuojančios diagramos polinėje koordinatinių sistemoje. Galima manyti, kad šios diagramos rodo dalelių fazinių trajektorijų sankirtos taškų su diagrama gaubtinę, išreiškiančią šių trajektorijų globaliosios bifurkacijos pavidalą. Gautos globaliosios bifurkacijos pobūdis panašus į Shilnikovo (De Feo 2004) globaliąją homoklininę bifurkaciją. Taigi galima susieti atskirų

dalelių paviršiuje suformuotą tekstūrą su jų fazinių trajektorijų elgsena, priklausančia nuo dalelės mechaninio laisvės laipsnio mišinyje, ir charakterizuoti atskiros dalelės stabilumo būseną. Fazinių trajektorijų globaliosios bifurkacijos pavidalą turinti diagrama taip pat leidžia charakterizuoti dalelių mišiniuose pasireiškiančius ir nuo trinties beveik nepriklausančius sužadintuosius neslopintuosius svyravimus.

Kalbant apie gautųjų rezultatų praktinę vertę, galima pasakyti, kad fazinės trajektorijos globaliosios bifurkacijos diagrama, charakterizuojanti kiekvieną konkrečią dalelės būseną (kartu ir jos pasireiškimo dažnumą, priklausančią nuo stabilumo), leidžia statistškai vertinti kiekvienos būsenos pasireiškimo tikimybę, o tai svarbu charakterizuojant viendispersių ir ypač daugiadispersių dalelių mišinių mikrobūsenas, suvaržytas išorinės makrolygmens struktūros. Rezonansinės elgsenos pasireiškimas gali būti naudojamas kaip būdas tinkamai parinkti granulimetrinę sudėtį bei medžiagos fizikines charakteristikas, gaunant didžiausią sistemos atsaką (Muratov *et al.* 2005; Sailer 2006; Schlesner 2008), o tai sudarytų galimybes efektyviam dalelių mišinių tankinimo procesui ir jų struktūros organizavimui. Tyrimo rezultatai taip pat gali būti naudingi analizuojant įvairių DEM modelių kvazistatinės pusiausvyros generuojamus rezultatus.

#### Literatūra

- Broer, H. W. 2004. KAM theory: the legacy of Kolmogorov's 1954 paper, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 41(4): 507–521.
- De Feo, O. 2004. Qualitative Resonance of Shilnikov-like strange attractors, part I: experimental evidence, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 14(3): 873–891. World Scientific Publishing Company.  
<http://dx.doi.org/10.1142/S0218127404009570>
- Edwards, S. F.; Oakeshott, R. B. S. 1989. Theory of powders, *Physica* 157: 1080–1090. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V. [http://dx.doi.org/10.1016/0378-4371\(89\)90034-4](http://dx.doi.org/10.1016/0378-4371(89)90034-4)
- Lacey, S. M. 2003. *Ray and Wave Dynamics in Three Dimensional Asymmetric Optical Resonators*. Oregon. 201 p.
- Leine, R. I.; Campen, D. H. 2011. *Some Aspects of Bifurcations in Non-Smooth Mechanical Systems* [žiūrėta 2011-09-29]. Prieiga per internetą: [www.zfm.ethz.ch](http://www.zfm.ethz.ch)
- Lichtenberg, A. J.; Leiberman, M. A. 1992. *Regular and Chaotic Dynamics*. Second edition. *Applied Mathematical Sciences* 38. New York: Springer-Verlag. 716 p.
- McMillan, A. J. 1997. A non-linear friction model for self-excited vibrations, *Journal of Sound and Vibration* 205: 323–335.  
<http://dx.doi.org/10.1006/jsvi.1997.1053>
- Muratov, C. B.; Vanden-Eijnden, E.; Weinan, E. 2005. Self-induced stochastic resonance in excitable systems, *Physica* 210: 227–240. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

- Sailer, F.-X. H. 2006. *Controlling Excitable Media With Noise*. Berlin. 148 p.
- Schlesner, J.; Zykov, V. S.; Brandtstadter, H.; Gerdes, I.; Engel, H. 2008. Efficient control of spiral wave location in an excitable medium with localized heterogeneities, *New Journal of Physics* 10: 17. <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/10/1/015003>
- Schmidt, G.; Tondl, A. 2009. *Non-Linear Vibrations*. Cambridge: Cambridge University Press. 421 p.
- Xuxin, T.; Andrade, J. E. 2008. Criteria for static equilibrium in particulate mechanics computations, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 75: 1581–1606. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2322>

## **SIMULATION OF THE POLY- AND MONODISPERSED GRANULAR MATERIAL. PART II: THE STABILITY STATE CHARACTERIZATION**

**G. Pocius, R. Balevičius**

**Abstract.** In the Part I of the paper, structure of granular aggregates obtained after compaction of poly- and mono-dispersed spherical particles was characterized in terms of the coordination number, particles contacting forces and volume fraction distributions. This part of investigation deals with characterization of the state of stability under quasistatic conditions of the formed granular aggregate structure. The proposed method is based on visualization of the plane of the particle radius size plotted normally to the particle velocity vector. At the beginning of the compacting process, when the discrete particle drops down under the gravity acceleration (almost free of contact with other particles), the planes plotted the cylinder-like pattern at each time step. At the quasistatic state, when the acceleration of the settled particles tends to negligible values, the plot of these planes represents a certain texture appearing on the particle surface. For the interpretation of these textures, Shilnikov's homoclinic bifurcation theory was discussed and applied. In particular, it was found that textures specifying the quasistatic state mainly resulted from the resonant effect depending on the degree of freedom of the analyzed particles.

**Keywords:** Discrete Element Method, poly-dispersed, mono-dispersed granular material, micro-state, quasi-static state, Hamiltonian mechanics, phase space.

**Gvidas POCIUS.** BSc (CE), Dept of Reinforced Concrete and Masonry Structures at Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania. Research interests: influence of concrete composition on the mechanical behaviour of structures, computer-aided modelling of structures.

**Robertas BALEVIČIUS.** MSc (CE), PhD. Dept of Reinforced Concrete and Masonry Structures at Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania. Research interests: mechanics of time-dependent materials, finite and discrete element methods.