GEODEZIJA IR KARTOGRAFIJA / GEODESY AND CARTOGRAPHY
2008
34(3): 97–99

UDK 528.14 doi: 10.3846/1392-1541.2008.34.97-99

PARAMETRINIŲ LYGČIŲ KOEFICIENTŲ KLAIDŲ ĮTAKA IŠLYGINTŲ PARAMETRŲ IR DYDŽIŲ TIKSLUMUI TAIKANT MAŽIAUSIŲJŲ KVADRATŲ METODĄ

Jonas Skeivalas

Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva
El. paštas Jonas.Skeivalas@ap.vgtu.lt

Įteikta 2008 02 14; priimta 2008 06 19

Santrauka. Pasiūlytas metodas ir formulės parametrinių lygčių koeficientų klaidų įtakai išlygintų parametrų ir dydžių tikslumui įvertinti tais atvejais, kai taikomas mažiausiųjų kvadratų metodas. Klasikinėse mažiausiųjų kvadratų metodo formulėse išlygintų parametrų ir dydžių tikslumas įvertinamas atsižvelgiant tik į išmatuotų dydžių klaidas. Išvestos formulės geodezinio tinklo, išlyginto mažiausiųjų kvadratų metodu, parametrų ir dydžių vektorių kovariacijų matricų įverčiams skaičiuoti, įvertinant parametrinių lygčių koeficientų klaidų įtaką.

Reikšminiai žodžiai: geodezinis tinklas, parametrinės lygtys, mažiausiųjų kvadratų metodas, kovariacija.

1. Įvadas

Apdorojant metrologinių ir geodezinių tinklų matavimų duomenis yra taikomas mažiausiųjų kvadratų metodas. Praktikoje išlygintų parametrų ir dydžių vektorių kovariacijų matricų įverčiams skaičiuoti taikomos klasikinės formulės, pagal jas įvertinama tik išmatuotų dydžių klaidų ir taikomo metodo įtaka kovariacijų matricų įverčiams (Koch 2000; Skeivalas 1995, 2007). Pagrindinių lygčių koeficientų klaidų įtaka geodezinių tinklų išlygintų parametrų ir dydžių tikslumui nagrinėta kai kuriuose plokštuminių ir erdvinių geodezinių koordinačių transformavimo darbuose (Skeivalas 2006; Skeivalas, Dargis 2006). Straipsnyje pasiūlytos formulės geodezinių tinklų išlygintų parametrų ir dydžių vektorių kovariacijų matricų įverčiams skaičiuoti atsižvelgiant į parametrinių lygčių koeficientų įtaką. Kovariacijų matricų įverčiai sudaryti iš dviejų komponenčių. Viena iš jų rodo išmatuotų dydžių klaidų, o antroji – parametrinių lygčių koeficientų klaidų įtaką išlygintų parametrų ir dydžių tikslumui.

2. Teoriniai teiginiai

Geodezinių tinklų išlyginimo praktikoje labiausiai paplitęs mažiausiųjų kvadratų metodas, taikant parametrus. Išlyginant kompiuteriniu būdu, parametrų variantas yra pranašesnis nei koreliatų, nes padeda automatizuoti reikiamų parametrinių lygčių sistemų sudarymą. Parametrų apytikrių reikšmių pataisų vektorius τ atliekant išlyginimo procedūras nustatomas pagal išraišką:

$$\tau = -\boldsymbol{N}^{-1}\omega = -\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{PL}, \tag{1}$$

čia $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{PA}$ – normalinių lygčių koeficientų matrica, $\boldsymbol{A}$ – parametrinių pataisų lygčių koeficientų matrica, $\boldsymbol{P}$ – išmatuotų dydžių svorių matrica, $\omega = \boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{PL}$ – normalinių lygčių laisvųjų narių vektorius, $\boldsymbol{L}$ – pataisų lygčių laisvųjų narių vektorius.

Išlygintų parametrų vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{T}}$ tikslumas įvertinamas kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\tilde{T}} = \boldsymbol{K}_{\tau}$, kuri sudaryta iš dviejų komponenčių:

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{T}} = \boldsymbol{K}_{\tau} = \boldsymbol{K}_{\tilde{T}(b)} + \boldsymbol{K}_{\tilde{T}(a)} = \boldsymbol{K}_{\tau(b)} + \boldsymbol{K}_{\tau(a)}. \tag{2}$$

Komponentė $\boldsymbol{K}_{\tilde{T}(b)}$ įvertina tik išmatuotų dydžių klaidų įtaką išlygintų parametrų tikslumui, o komponentė $\boldsymbol{K}_{\tilde{T}(a)}$ – ir parametrinių lygčių koeficientų klaidų įtaką išlygintų parametrų tikslumui. Kovariacijų matricos $\boldsymbol{K}_{\tilde{T}}$ komponentės $\boldsymbol{K}_{\tilde{T}(b)}$ išraiška:

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{T}(b)} = \sigma_0^2\boldsymbol{N}^{-1}, \tag{3}$$

čia σ_0 – matavimo rezultato, kurio svoris lygus vienetui, standartinis nuokrypis.

Pertvarkome formulę (1), sudarydami joje naujas matricas $\boldsymbol{N}_0^{-1}$ ir ω_0, blokinių matricų pavidalu ir nauja išraiška (Skeivalas 2006):

$$\tau = -\omega_0^{T}\boldsymbol{N}_0^{-1} = -\begin{pmatrix} \omega^{T} & & & \\ & \omega^{T} & & \\ & & \dots & \\ & & & \omega^{T} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{N}}_1^{T} \\ \bar{\boldsymbol{N}}_2^{T} \\ \dots \\ \bar{\boldsymbol{N}}_k^{T} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

čia ω_0^T yra blokinė kvazidiagonalioji matrica, sudaryta iš k blokinių ω^T komponenčių, $\bar{N}_i$ – matricos N^{-1} i-oji eilutė, $N_0^{-1}=\left(\bar{N}_1\bar{N}_2...\bar{N}_k\right)^T$. Taigi matrica N_0^{-1} yra blokinis vektorius, ir vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ kovariacijų matricos K_τ komponentę $K_{\tau(a)}$ galime rašyti tokiu pavidalu:

$$K_{\tau(a)}=K_{\tilde{T}(a)}=\omega_0^T K_{N_0^{-1}}\omega_0=$$
$$\omega_0^T\begin{pmatrix} K_{\bar{N}_1\bar{N}_1} & K_{\bar{N}_1\bar{N}_2} & ... & K_{\bar{N}_1\bar{N}_k}\\ K_{\bar{N}_2\bar{N}_1} & K_{\bar{N}_2\bar{N}_2} & ... & K_{\bar{N}_2\bar{N}_k}\\ ... & & ... & \\ K_{\bar{N}_k\bar{N}_1} & K_{\bar{N}_k\bar{N}_2} & ... & K_{\bar{N}_k\bar{N}_k}\end{pmatrix}\omega_0, \tag{5}$$

čia $K_{N_0^{-1}}$ – matmenys $(kk\times kk)$, $K_{\bar{N}_i\bar{N}_j}=K\left(\bar{N}_i^T,\bar{N}_j^T\right)$ – kovariacijų matricos $K_{N_0^{-1}}$ blokinė dalis, t. y. vektorių $\bar{N}_i^T$ ir $\bar{N}_j^T$ kovariacijų matrica. Šios blokinės dalys gaunamos dėl matricos A elementų a_{ij} klaidų įtakos.

Kovariacijų matricos $K_{N_0^{-1}}$ blokinės dalys $K_{\bar{N}_i\bar{N}_j}$ yra daugiamatės $(k\times k)$, nes matricos N^{-1} kiekviena eilutė $\bar{N}_i$ susideda iš k komponenčių, t. y. $\bar{N}_i=\left(\bar{N}_{i1}\bar{N}_{i2}...\bar{N}_{ik}\right)$, i = 1, 2, ..., k. Taigi kovariacijų matricos $K_{N_0^{-1}}$ blokinės dalys yra tenzoriai. Tada galime rašyti:

$$K_{\bar{N}_i\bar{N}_j}=\begin{pmatrix} K_{i1,j1} & K_{i1,j2} & ... & K_{i1,jk}\\ K_{i2,j1} & K_{i2,j2} & ... & K_{i2,jk}\\ ... & & ... & \\ K_{ik,j1} & K_{ik,j2} & ... & K_{ik,jk}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

čia i, j = 1, 2, ..., k.

Nustatysime kovariacijų matricos $K_{\tau(a)}$ (5) blokinių dalių $K_{\bar{N}_i\bar{N}_j}$ (6) išraiškas. Šiam reikalui taikysime matricų diferencijavimą. Matricos $N^{-1}=(A^TPA)^{-1}$ nuokrypį nuo vidurkio $M(N^{-1})$ rašome matricos δN^{-1} pavidalu:

$$\delta N^{-1}=N^{-1}-M\left(N^{-1}\right)=$$
$$M\left(N^{-1}\right)+\frac{\partial N^{-1}}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial A}\delta A-$$
$$M\left(N^{-1}\right)=\frac{\partial N^{-1}}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial A}\delta A, \tag{7}$$

čia $M(N^{-1})$ – atvirkštinės matricos N^{-1} vidurkis, kuris suprantamas kaip jos elementų vidurkis; $\delta A = A - M(A)$ – matricos A nuokrypis nuo vidurkio $M(A)$.

Toliau rašome dalinės išvestinės $\delta N^{-1}/\delta N$ išraišką (Skeivalas 2007):

$$NN^{-1}=E,$$

ir $$N\frac{\partial N^{-1}}{\partial N}+\frac{\partial N}{\partial N}N^{-1}=0,$$

arba $$\frac{\partial N^{-1}}{\partial N}=-N^{-1}N^{-1}=-N^{-2}. \tag{8}$$

Dalinė išvestinė $\delta N/\delta A$ yra lygi

$$\frac{\partial N}{\partial A}=\frac{\partial\left(A^TPA\right)}{\partial A}=A^TP\frac{\partial A}{\partial A}+$$
$$\left(\frac{\partial A^T}{\partial A}PA\right)^T=2A^TP. \tag{9}$$

Į formulę (7) įrašę išraiškas (8), (9) gauname:

$$\delta N^{-1}=-2N^{-2}A^TP\delta A=-\bar{N}_a\delta A, \tag{10}$$

čia $\bar{N}_a=-2N^{-2}A^TP$ – stačiakampė matrica $(k\times n)$, δA – koeficientų pataisų matrica $(n\times k)$.

Toliau sudarome išraišką:

$$\delta N_0^{-1}=-\begin{pmatrix}\bar{N}_a\delta A_1\\ \bar{N}_a\delta A_2\\ ...\\ \bar{N}_a\delta A_k\end{pmatrix}, \tag{11}$$

čia δA_i – i-asis matricos δA stulpelis.

Vektoriaus δN_0^{-1} kovariacijų matrica yra lygi

$$K_{N_0^{-1}}=K_{\delta N_0^{-1}}=M\left\{\begin{pmatrix}\bar{N}_a\delta A_1\\ \bar{N}_a\delta A_2\\ ...\\ \bar{N}_a\delta A_k\end{pmatrix}\times\right.$$
$$\left.\left(\delta A_1^T\bar{N}_a^T\ \ \delta A_2^T\bar{N}_a^T...\delta A_k^T\bar{N}_a^T\right)\right\},$$

arba

$$K_{N_0^{-1}}=$$
$$\begin{pmatrix}\bar{N}_aK_{A_1A_1}\bar{N}_a^T & \bar{N}_aK_{A_1A_2}\bar{N}_a^T & ... & \bar{N}_aK_{A_1A_k}\bar{N}_a^T\\ \bar{N}_aK_{A_2A_1}\bar{N}_a^T & \bar{N}_aK_{A_2A_2}\bar{N}_a^T & ... & \bar{N}_aK_{A_2A_k}\bar{N}_a^T\\ ... & & ... & \\ \bar{N}_aK_{A_kA_1}\bar{N}_a^T & \bar{N}_aK_{A_kA_2}\bar{N}_a^T & ... & \bar{N}_aK_{A_kA_k}\bar{N}_a^T\end{pmatrix}, \tag{12}$$

čia pažymėta $K_{A_iA_j}=K_{\delta A_i\delta A_j}=M\left\{\delta A_i\delta A_j^T\right\}$ ir jos matmenys $(n\times n)$, $K_{\bar{N}_i\bar{N}_j}=\bar{N}_aK_{A_iA_j}\bar{N}_a^T$.

Formulę (12) galima išreikšti

$$K_{N_0^{-1}}=\left(\bar{N}_a,\bar{N}_a,...\bar{N}_a\right)_{\mathbf{diag}}\times$$
$$\begin{pmatrix}K_{A_1A_1} & K_{A_1A_2} & ... & K_{A_1A_k}\\ K_{A_2A_1} & K_{A_2A_2} & ... & K_{A_2A_k}\\ ... & & ... & \\ K_{A_kA_1} & K_{A_kA_2} & ... & K_{A_kA_k}\end{pmatrix}\left(\bar{N}_a^T,\bar{N}_a^T,...\bar{N}_a^T\right)_{\mathbf{diag}}, \tag{13}$$

čia pirmosios blokinės kvazidiagonaliosios matricos matmenys yra $(kk\times kn)$, o antrosios – $(kn\times kk)$. Blokinių dalių $\bar{N}_a$ skaičius kiekvienoje kvazidiagonaliojoje matricoje lygus k. Blokinių dalių $K_{A_iA_j}$ matmenys yra $(n\times n)$.

Praktiniams skaičiavimams buvo sudaryta kompiuterinė programa *Tinparg.m*, taikant *Matlab* programinio paketo operatorius:

```
% Parametrinių lygčių koeficientų klaidų įtakos analizė;
Na=2*N1^2*A'*P;
Nad=zeros(k*k,k*n);
for i=1:k;
for j=1:k;
for f=1:n;
Nad(j+i*k-k,f+i*n-n)=Na(j,f);
end;
end;
end;
wt=w';
w0t=zeros(k,k*k);
for i=1:k;
for j=1;
for f=1:k;
w0t(j+i*1-1,f+i*k-k)=wt(j,f);
end;
end;
end;
%Ka=10^-4*eye(k*n);
Ka1=cov(A');
Ka=zeros(k*n,k*n);
for i=1:k;
for j=1:n;
for f=1:n;
for g=1:k;
Ka(j+i*n-n,f+g*n-n)=Ka1(j,f);
end;
end;
end;
end;
KN0=Nad*Ka*Nad';
Kta=w0t*KN0*w0t';% išlygintų parametrų vektoriaus kovariacijų
% matrica dėl lygčių koeficientų klaidų įtakos;
% KAa=cov(A);
% KAa1=cov(A');
```

Skaičiavimams naudota Lietuvos 1-osios klasės vertikaliojo tinklo matavimo ir išlyginimo duomenys (Adam *et al.* 2000; Ardlan *et al.* 2002; Moritz 1988; Skeivalas 2007, 2008). Tinklo mazginių taškų išlygintų altitudžių standartinių nuokrypių dėl parametrinių lygčių koeficientų klaidų įtakos įverčių vidutinė reikšmė gauta $m_{\tilde{H}(a)} = m_{\tau(a)} \approx 6\,\text{mm}$.

Vertikaliojo tinklo mazginių taškų išlygintų altitudžių standartinio nuokrypio įverčiai dėl išmatuotų dydžių klaidų įtakos kinta nuo 5 mm iki 9 mm. Taigi parametrinių lygčių koeficientų klaidų įtaka išlygintų parametrų tikslumui yra maždaug 30% mažesnė nei išmatuotų dydžių klaidų įtaka.

3. Išvados

1. Straipsnyje pateiktos formulės mažiausiųjų kvadratų metodu išlygintų parametrų vektorių kovariacijų matricų įverčiams skaičiuoti, įvertinant parametrinių lygčių koeficientų klaidų įtaką.
2. Praktiniai skaičiavimai pagal Lietuvos 1-osios klasės vertikaliojo tinklo matavimų duomenis parodė, kad parametrinių lygčių koeficientų klaidų įtaka išlygintų parametrų standartinio nuokrypio įverčiams yra gana žymi, ir jų reikšmės maždaug 30% mažesnės už standartinio nuokrypio įverčius dėl išmatuotų dydžių klaidų.

Literatūra

Adam, J.; Augath, F.; Brouwer, A. A. 2000. Status and Development of the European Height Systems, in *IAG Symposia*, Vol 121, Geodesy beyond year 2000. Springer: Berlin Heidelberg, 55–60.

Ardlan, A.; Grafarend, E.; Kakkuri, J. 2002. National height datum, the Gauss-Listing geoid level value $\dot{W}_0$ and its time variation $\dot{W}_0$ (Baltic Sea Level Project: epochs 1990.8, 1993.8, 1997.4), *Journal of Geodesy* 76(1): 1–28.

Koch, K. R. 2000. *Einführung in die Bayes-Statistik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 225 S.

Moritz, H. 1988. Geodetic Reference System 1980. *Bulletin Geodesique, the Geodesists Handbook*. International Union of Geodesy and Geophysics, 348–358.

Skeivalas, J. 1995. *Koreliuotų geodezinių matavimų rezultatų matematinis apdorojimas* [Treatment of correlated geodetic measurements]. Vilnius: Technika. 272 p.

Skeivalas, J. 2007. Geodezinio vertikaliojo tinklo išlyginimo modelis eliminuojant sistemines klaidas [Adjustment model of geodetic vertical network, eliminating systemic errors], *Geodezija ir kartografija* [Geodesy and Cartography] 33(2): 41–46.

Skeivalas, J. 2006. Topocentrinių horizontinių koordinačių, transformuotų pagal geocentrines stačiakampes koordinates, tikslumas [Accuracy of topocentric horizontal coordinates transformed from geocentric Cartesian coordinates], *Geodezija ir kartografija* [Geodesy and Cartography] 32(2): 42–45.

Skeivalas, J.; Dargis, R. 2006. Plokštuminių ir erdvinių geodezinių koordinačių transformavimo algoritmų tikslumo analizė [Analysis of the algorithms accuracy of the plane and space geodetic coordinates transformation], *Geodezija ir kartografija* [Geodesy and Cartography] 32(3): 62–65.

Skeivalas, J. 2008. *GPS tinklų teorija ir praktika* [Theory and Practice of GPS Networks]. Vilnius: Technika. 288 p.

Jonas SKEIVALAS. Prof, Doctor Habil. Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania. Ph +370 5 2744 703, Fax +370 5 2744 705, e-mail: *jonas.skeivalas@ap.vgtu.lt.*

Author of two monographs and more than 150 scientific papers. Participated in many intern conferences and research visits to the Finish Geodetic Institute.

Research interests: processing of measurements with respect to tolerances, adjustment of geodetic networks.