ISSN 1392–1541

Geodezija ir kartografija, 2004, XXX t., Nr. 4
Geodesy and Cartography, 2004, Vol XXX, No 4

UDK 528.14

GEODEZINIŲ KOORDINAČIŲ TRANSFORMAVIMO HELMERTO ALGORITMU TIKSLUMAS

Jonas Skeivalas
Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas,
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius-40, Lietuva,
el. paštas: Jonas.Skeivalas@ap.vtu.lt
Įteikta 2005 01 05; *priimta 2005*

Santrauka. Straipsnyje nagrinėjamas geodezinių koordinačių tikslumas, transformuojant jas iš vienos koordinačių sistemos į kitą. Transformavimo parametrų reikšmės apskaičiuojamos mažiausiųjų kvadratų metodu. Transformavimo parametrų bei transformuotų koordinačių tikslumas nustatomas atsižvelgiant į identiškų taškų abiejose koordinačių sistemose tikslumą. Analizuojama papildomų parametrų, taikomų koordinačių sisteminėms klaidoms eliminuoti, įtaka koordinačių transformavimo parametrų bei transformuotų koordinačių tikslumui. Pateikiamos formulės transformavimo parametrų ir transformuotų koordinačių kovariacijų matricoms įvertinti.

Raktažodžiai: transformavimo parametrai, kovariacija.

1. Įvadas

Geodezinių koordinačių transformavimas iš vienos koordinačių sistemos į kitą sistemą yra dažna ir įprastinė geodezijos ir kartografijos darbuose taikoma procedūra. Tai geodezinių tinklų sudarymo, kartografavimo darbai, geoinformacinių sistemų, skaitmeninių žemėlapių kūrimo, inžinerinės geodezijos, kadastro uždaviniai ir kt. [1–6]. Geodezinių tinklų taškų plokštuminėms arba erdvinėms koordinatėms transformuoti iš senos sistemos į naująją sistemą naudojami identiški taškai, kurių koordinatės žinomos abiejose sistemose. Remiantis šiais taškais yra apskaičiuojamos transformavimo parametrų reikšmės, tada pagal atitinkamas formules skaičiuojamos koordinatės naujoje sistemoje. Plokštuminėms koordinatėms transformuoti iš vienos koordinačių sistemos į kitą dažniausiai taikomas konforminis Helmerto metodas. Erdvinėms koordinatėms transformuoti taikomi kiti metodai. Straipsnyje nagrinėsime koordinačių transformavimo tikslumą, kuris priklauso nuo abiejų sistemų identiškų taškų koordinačių tikslumo bei nustatytų transformavimo parametrų tikslumo. Įprastinėse transformavimo procedūrose atsižvelgiama tik į naujos sistemos identiškų taškų koordinačių tikslumą. Dažnais atvejais identiškų taškų koordinačių svorių matrica laikoma lygi vienetinei matricai.

Straipsnyje analizuojama identiškų taškų koordinačių senojoje bei naujojoje sistemose klaidų įtaka apskaičiuotų transformavimo parametrų tikslumui. Nustatyta transformuotų koordinačių kovariacijų matricos išraiška.

2. Transformavimo procedūrų tikslumo teorinė analizė

Nagrinėsime plokštuminėms koordinatėms transformuoti iš vienos koordinačių sistemos į kitą taikomą konforminį Helmerto metodą. Transformavimo parametrams nustatyti taikomas mažiausiųjų kvadratų metodas. Koordinačių transformavimo tikslumas priklauso nuo keleto rodiklių: senos sistemos taškų koordinačių tikslumo, transformavimo parametrų nustatymo tikslumo, kuris savo ruožtu priklauso nuo identiškų taškų naujojoje ir senojoje sistemose koordinačių tikslumo. Analizuosime kiekvieno iš šių rodiklių įtaką transformavimo procedūrų charakteristikoms, nustatydami kovariacijų matricų išraiškas.

Pataisų lygčių sistema, kuri sudaroma transformavimo parametrų reikšmėms nustatyti mažiausiųjų kvadratų metodu, panaudojus identiškų taškų koordinates naujoje ir senojoje sistemose, atrodo taip:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{L}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}', \tag{2}$$

čia $\boldsymbol{V} = \left(v_{x_1}, v_{y_1}, ..., v_{x_n}, v_{y_n}\right)^T$ – naujos sistemos identiškų taškų koordinačių pataisų vektorius, $\boldsymbol{T} = \left(x_1, y_1, ..., x_n, y_n\right)^T$ – koordinačių vektorius senojoje sistemoje, $\boldsymbol{T}' = \left(x_1', y_1', ..., x_n', y_n'\right)^T$ – koordinačių vektorius naujojoje sistemoje, $\boldsymbol{\tau} = \left(x_0, y_0, \bar{\varepsilon}_x, \varepsilon_y\right)^T$ – transformavimo parametrų vektorius, $\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x - 1$, n – identiškų taškų skaičius. Identiškų taškų skaičius $n > k/2$, čia $k = 4$ – transformavimo parametrų skaičius.

Pataisų lygčių koeficientų matrica $\boldsymbol{A}$ sudaroma iš skirtingų blokų:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

čia $\boldsymbol{A_i} = \left(\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}_i'\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x_i & -y_i \\ 0 & 1 & y_i & x_i \end{array}\right)$.

Transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ reikšmė nustatoma mažiausiųjų kvadratų metodu, sprendžiant normalinių lygčių sistemą:

$$\boldsymbol{N\tau}+\boldsymbol{\omega}=0, \tag{4}$$

čia $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1} A}$, $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1} L}$, $\boldsymbol{Q_{T'}}$ – naujosios sistemos identiškų taškų koordinačių svorinė matrica.

Kai pavienių taškų koordinatės nustatytos nepriklausomai viena nuo kitos,

$$\boldsymbol{Q_{T'}}=\left(\boldsymbol{Q_{T',1}},\boldsymbol{Q_{T',2}},...,\boldsymbol{Q_{T',n}}\right)_{\boldsymbol{diag}},$$

$$\boldsymbol{Q_{T',i}}=\begin{pmatrix} p_{x_i'}^{-1} & Q_{x_i'y_i'} \\ Q_{y_i'x_i'} & p_{y_i'}^{-1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{i}=1,2,...,\boldsymbol{n},$$

čia $p_{x_i'}, p_{y_i'}$ – i-ojo taško koordinačių naujojoje sistemoje svoriai, $Q_{x_i'y_i'}=r_{x_i'y_i'}p_{x_i'}^{-1/2}p_{y_i'}^{-1/2}$, $r_{x_i'y_i'}$ – koreliacijos koeficientas.

Normalinių lygčių sistemos sprendinys yra lygus:

$$\boldsymbol{\tau}=-\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{\omega}=-\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1} L}. \tag{5}$$

Apskaičiavę transformavimo parametrų vektorių τ, skaičiuojame visų kitų naujosios sistemos taškų transformuotų koordinačių vektorių $\boldsymbol{T'}$ pagal formulę:

$$\boldsymbol{T'}=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{T}, \tag{6}$$

čia $\boldsymbol{A}_0$ – koordinačių transformavimo koeficientų matrica, kurios pavidalas (3).

Apskaičiuotų transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$ ir išlygintų identiškų taškų koordinačių vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{T}}'$ kovariacijų matricų $\boldsymbol{K_\tau}$ ir $\boldsymbol{K_{\tilde{T}'}}$ išraiškos užrašomos įprastinėmis formulėmis [5]:

$$\boldsymbol{K_\tau}=\sigma_0^2\boldsymbol{N}^{-1}=\sigma_0^2\boldsymbol{Q_\tau}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{K_{\tilde{T}'}}=\sigma_0^2\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T}=\sigma_0^2\boldsymbol{Q_{\tilde{T}'}}, \tag{8}$$

čia σ_0 – matavimo rezultato su vienetui lygiu svoriu standartinis nuokrypis.

Tačiau kovariacijų matricų skaičiavimo formulės (7) ir (8) nėra tikslios, nes neįvertina senosios koordinačių sistemos identiškų taškų koordinačių klaidų įtakos transformavimo parametrų nustatymo procedūrose.

Naujosios sistemos transformuotų koordinačių vektoriaus $\boldsymbol{T'}$ kovariacijų matrica nustatoma iš formulės (6):

$$\boldsymbol{K_{T'}}=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{K_\tau}\boldsymbol{A}_0^{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{K_T}, \tag{9}$$

nes vektoriai $\boldsymbol{\tau}$ ir T yra nekoreliuoti.

Transformavimo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}$, kaip tiesiniu operatoriumi gautos išraiškos (5), kovariacijų matricą $\boldsymbol{K_\tau}$ gauname tokiu pavidalu:

$$\boldsymbol{K_\tau}=\left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}}\right)\boldsymbol{K_L}\left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}}\right)^{\boldsymbol{T}}. \tag{10}$$

Laisvųjų narių vektoriaus $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T'}$ kovariacijų matrica $\boldsymbol{K_L}$ yra lygi

$$\boldsymbol{K_L}=\boldsymbol{K_T}+\boldsymbol{K_{T'}}=\sigma_0^2\left(\boldsymbol{Q_T}+\boldsymbol{Q_{T'}}\right). \tag{11}$$

Toliau formulę (10) galime užrašyti taip:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_\tau &=\sigma_0^2\left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}}\right)\left(\boldsymbol{Q_T}+\boldsymbol{Q_{T'}}\right)\left(\boldsymbol{Q_{T'}^{-1}AN}^{-1}\right)=\\ &=\sigma_0^2\left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}Q_T Q_{T'}^{-1}AN}^{-1}+\boldsymbol{N}^{-1}\right)=\\ &=\sigma_0^2\left(\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}^{-1}+\boldsymbol{N}^{-1}\right),\end{aligned} \tag{12}$$

čia $\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}Q_T Q_{T'}^{-1}A}$.

Kai naujosios ir senosios sistemų identiškų taškų koordinatės yra maždaug vienodo tikslumo, t. y. $\boldsymbol{Q_{T'}}\approx\boldsymbol{Q_T}$, tuo atveju $\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{N}$, ir

$$\boldsymbol{K_\tau}=2\sigma_0^2\boldsymbol{N}^{-1}. \tag{13}$$

Taigi transformuotų į naująją sistemą koordinačių vektoriaus $\boldsymbol{T'}$ kovariacijų matrica, taikant (9) ir (13) formules, atrodo taip:

$$\boldsymbol{K_{T'}}=\sigma_0^2\left(2\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A}_0^{\boldsymbol{T}}+\boldsymbol{Q_T}\right). \tag{14}$$

Išlygintų identiškų taškų koordinačių vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{T}}'$ išraišką galime parašyti:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{T}}' &=\boldsymbol{T'}+\boldsymbol{V}=\boldsymbol{T'}+\boldsymbol{A\tau}+\boldsymbol{L}=\\ &=\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}}\right)\boldsymbol{T}+\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}T'}.\end{aligned} \tag{15}$$

Kadangi senosios ir naujosios sistemų koordinačių vektoriai $\boldsymbol{T}$ ir $\boldsymbol{T'}$ yra nepriklausomi, vektoriaus $\tilde{\boldsymbol{T}}'$ kovariacijų matrica rašoma tokiu pavidalu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K_{\tilde{T}'}} &=\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}}\right)\boldsymbol{K_T}\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}}\right)^{\boldsymbol{T}}+\\ &+\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}K_{T'}}\left(\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}}\right)^{\boldsymbol{T}}.\end{aligned}$$

Atlikę atitinkamus matematinius pertvarkymus turime:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K_{\tilde{T}'}} &=\sigma_0^2\left(\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}Q_T Q_{T'}^{-1}AN}^{-1}\boldsymbol{A^T}-\right.\\ &-\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}Q_T}-\boldsymbol{Q_T Q_{T'}^{-1}AN}^{-1}\boldsymbol{A^T}+\boldsymbol{Q_T}+\\ &\left.+\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T}\right)=\sigma_0^2\left(\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{A^T}-\right.\\ &\left.-2\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T Q_{T'}^{-1}Q_T}+\boldsymbol{Q_T}+\boldsymbol{AN}^{-1}\boldsymbol{A^T}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Tuo atveju, kai naujosios ir senosios sistemų identiškų taškų koordinačių tikslumas yra maždaug vienodas, t. y. $\boldsymbol{Q_T} \approx \boldsymbol{Q_{T'}}$, formulė (16) įgauna išraišką

$$\boldsymbol{K}_{\tilde{\boldsymbol{T}}'} = \sigma_0^2 \boldsymbol{Q_T} = \boldsymbol{K_T}. \tag{17}$$

Ši formulė rodo, kad naujosios sistemos identiškų taškų išlygintų koordinačių kovariacijų matrica yra lygi senosios sistemos identiškų taškų koordinačių kovariacijų matricai. Tai tam tikras paradoksas. Formulės (14) ir (17) rodo, kad transformuotos į naująją sistemą koordinatės nėra tikslesnės už senosios sistemos koordinates.

3. Transformavimo algoritmų, taikant papildomus parametrus, tikslumas

Nagrinėsime koordinačių transformavimo iš vienos sistemos į kitą variantą, kai koordinačių sisteminėms klaidoms eliminuoti taikomi papildomi parametrai.

Pataisų lygčių sistema taikant papildomus parametrus atrodo taip [5]:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\tau + \boldsymbol{C}\delta + \boldsymbol{L}, \tag{18}$$

čia $\boldsymbol{C}$ – papildomų parametrų koeficientų matrica ($2n \times s$), $\boldsymbol{\delta}$ – papildomų parametrų vektorius ($s \times 1$). Papildomų parametrų skaičius $s<2$n–k, k = 4 – transformavimo parametrų skaičius.

Sprendinys gaunamas taikant mažiausiųjų kvadratų metodą:

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix} = -\boldsymbol{N}_0^{-1}\boldsymbol{\omega}_0, \tag{19}$$

čia

$$\boldsymbol{N}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{N}_{21} & \boldsymbol{N}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{C} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{L} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Transformavimo parametrų $\boldsymbol{\tau}$ ir papildomų parametrų $\boldsymbol{\delta}$ bendro vektoriaus $\boldsymbol{\tau}_0$ kovariacijų matrica yra lygi:

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\tau}_0} = \boldsymbol{N}_0^{-1}\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}_0}\boldsymbol{N}_0^{-1}. \tag{22}$$

Normalinių lygčių laisvųjų narių vektoriaus $\boldsymbol{\omega}_0$ kovariacijų matricos išraiška gaunama remiantis lygybe (21) –

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}_0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1} \\ \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{K_L} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1} \\ \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{T}}.$$

Toliau gauname

$$\boldsymbol{K}_{\omega_0} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1} \\ \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1} \end{pmatrix} (\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'} + \boldsymbol{Q_T}) (\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{C}).$$

Sudauginę matricas turime:

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}_0} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11} + \boldsymbol{N}'_{11} & \boldsymbol{N}_{12} + \boldsymbol{N}'_{12} \\ \boldsymbol{N}_{21} + \boldsymbol{N}'_{21} & \boldsymbol{N}_{22} + \boldsymbol{N}'_{22} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

čia blokinių matricų $\boldsymbol{N}_{11}, \boldsymbol{N}_{12}, \boldsymbol{N}_{21}, \boldsymbol{N}_{22}$ išraiškos randamos iš lygybės (20), o kitų blokinių matricų –

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}'_{11} &= \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{Q_T}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{N}'_{12} &= \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{Q_T}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{C}, \\ \boldsymbol{N}'_{21} &= \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{Q_T}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{N}'_{22} &= \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{Q_T}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'}^{-1}\boldsymbol{C}. \end{aligned}$$

Tuo atveju, kai naujosios ir senosios sistemų koordinačių tikslumas yra maždaug vienodas, t. y. $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{T}'} \approx \boldsymbol{Q_T}$, gauname $N'_{ij} = N_{ij}$, ir kovariacijų matrica $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}_0}$ pagal formulę (23) yra lygi

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\omega}_0} = 2\sigma_0^2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{N}_{21} & \boldsymbol{N}_{22} \end{pmatrix} = 2\sigma_0^2 \boldsymbol{N}_0. \tag{24}$$

Bendrojo parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\tau}_0$ kovariacijų matricą $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\tau}_0}$ gauname pagal formules (22) ir (24):

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\tau}_0} = 2\sigma_0 \boldsymbol{N}_0^{-1} = 2\sigma_0 \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12} \\ \boldsymbol{Q}_{21} & \boldsymbol{Q}_{22} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Atvirkštinei matricai $\boldsymbol{N}_0^{-1}$ skaičiuoti taikome Frobeniuso formulę [2]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_0^{-1} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{N}_{21} & \boldsymbol{N}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{N}_{11}^{-1} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}} & -\boldsymbol{F}\boldsymbol{H}^{-1} \\ -\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}} & \boldsymbol{H}^{-1} \end{array} \right), \end{aligned} \tag{26}$$

čia $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{N}_{12}$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{N}_{22} - \boldsymbol{N}_{21}\boldsymbol{N}_{11}^{-1}\boldsymbol{N}_{12} = \boldsymbol{N}_{22.1}$.

Matricos $\boldsymbol{N}_0$ blokinė dalis $\boldsymbol{N}_{11}$ yra lygi matricai $\boldsymbol{N}$, kuri sudaroma skaičiuojant transformavimo parametrų vektorių $\boldsymbol{\tau}$ be papildomų parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\delta}$, t. y. $\boldsymbol{N}_{11} = \boldsymbol{N}$.

Pagal formules (25) ir (26) matyti, kad vektoriaus $\boldsymbol{\tau}_0 = (\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{T}})^{\boldsymbol{T}}$ komponenčių $\boldsymbol{\tau}$ ir $\boldsymbol{\delta}$ kovariacijų matricos atitinkamai yra lygios:

$$\overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{\tau}} = 2\sigma_0 (\boldsymbol{N}_{11}^{-1} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}}), \tag{27}$$

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\delta}} = 2\sigma_0 \boldsymbol{H}^{-1}. \tag{28}$$

Formulė (27) rodo, kad transformavimo parametrų vektorius $\boldsymbol{\tau}$ mažiau tikslus tuo atveju, kai skaičiavimuose taikomas papildomų parametrų vektorius $\boldsymbol{\delta}$ sisteminėms klaidoms eliminuoti.

Tai rodo, kad papildomų parametrų vektoriui skaičiuoti panaudojus tam tikrą dalį matavimų informacijos atitinkamai sumažėja apskaičiuotų transformavimo parametrų tikslumas. Taigi tuo atveju, kai nėra realaus pagrindo įtarti, kad taškų koordinatės turi sisteminių klaidų, nėra reikalo skaičiavimo algoritme taikyti papildomų parametrų vektoriaus $\boldsymbol{\delta}$.

Naujosios sistemos transformuotų koordinačių vektoriaus $\boldsymbol{T}'$ kovariacijų matrica $\overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}'}$, kai transformavimo algoritme panaudojami papildomi parametrai, taikant formulę (9) užrašoma taip:

$$\overline{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}'} = \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\tau}_0} \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}} . \qquad (29)$$

4. Išvados

1. Išvestos formulės (12), (13), pagal kurias apskaičiuojamos koordinačių transformavimo parametrų kovariacijų matricos.

2. Formulės (14), (16) ir (17) rodo, kad į naująją sistemą transformuotosios koordinatės nėra tikslesnės už senosios sistemos koordinates. Naujosios sistemos identiškų taškų išlygintų koordinačių dispersijos nėra mažesnės už senosios sistemos identiškų taškų koordinačių dispersijas.

3. Transformavimo parametrų vektorius $\boldsymbol{\tau}$ mažiau tikslus tuo atveju, kai transformavimo parametrų skaičiavimo algoritme naudojami papildomi parametrai sisteminėms klaidoms eliminuoti.

Literatūra

1. Koch, K.-R. Räumliche Helmert-Transformation variabler Koordinaten im Gauss-Helmert und im Gauss-Markoff Modell. Z. f. Vermessungswessen, 2002, No 3. Stuttgart: Verlag K. Witwer, S. 147–152.
2. Koch, K.-R. Einführung in die Bayes-Statistik. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. 225 S.
3. Fischer, B.; Hegland, M. Collocation, Filtering and Nonparametric Regression, Part 1. Z. f. Vermessungswesen, 1999, No 1. Stuttgart: Verlag K. Witwer, S. 17–24.
4. Chitau, D. Über Koordinatentransformation in dreidimensionalen Systemen mit linearen Modellen. Z. F. Vermessungswessen, 1996, No 5. Stuttgart: Verlag K. Witwer, S. 203–211.
5. Skeivalas, J.; Putrimas, R. Accuracy analysis of planimetric coordinate transformation (Planimetrinių koordinačių transformavimo tikslumo analizė). *Geodesy and Cartography* (*Geodezija ir kartografija*), Nr. 1 (23). Vilnius: Technika, 1996, p. 92–95 (in Lithuanian).
6. Zakarevičius, A. Investigation of the recent geodynamic processes in the territory of the Lithuania. (Dabartinių geodinaminių procesų Lietuvos teritorijoje tyrimas). Vilnius: Technika, 2003. 195 p. (in Lithuanian).